ベクトル値関数に対する Caristi の不動点定理について(非線形解析学と凸解析学の研究)

荒谷, 洋輔; 田中, 環

数理解析研究所講究録
1484 巻 2006 年 114-123

ベクトル値関数に対する Caristiの不動点定理について

新潟大学大学院 自然科学研究科 荒谷 洋輔 (ARAYA, Yousuke)*
(Graduate School of Science and Technology, Niigata University)
新潟大学大学院 自然科学研究科 田中 環 (TANAKA, Tamaki)†
(Graduate School of Science and Technology, Niigata University)

1 はじめに

本稿はCaristiの不動点定理のベクトル値関数への拡張を取り扱ったものである。Caristiの不動点定理は最適化の分野で重要な定理である，Ekelandの変分原理と同値であることがわかっている。Ekelandの変分原理では取り扱う関数の定義域の基礎空間を完備距離空間と仮定する。そして実数値関数の下への有界性を仮定すると関数の下限値にいくらでも近い値をとる点の存在性が保証される。これらをEkelandは下半連続性という関数の連続性を弱めた条件下で初期値から距離に比例した改善度による近似下限値を与える結果を1972年に発表している ([3])。この定理は，最適化の分野で数学的な理論のみならず数値計算の理論においても幅広い応用があり，様々な研究がなされている。私たちはTammerによって1992年に得られた，ベクトル値関数に対するEkelandの変分原理の結果 ([6], [7], [13]) に注目した。Tammerらによる変分原理の拡張については，次の2つの手法に大きく分類することができる。

(1) 定義域の空間と値域の空間との直積空間に順序を導入する方法。

(2) TammerとWeidnerが[5]で提案した，ベクトル値関数に対する非線形スカラー化関数を利用する方法。

私たちは，この2つの手法とTammerらの結果を利用し，また，Caristiの不動点定理とEkelandの変分原理の同値性に着目して，ベクトル値関数に対するCaristi型の，4つの異なるタイプの不動点定理を得たのでここに報告する。

*E-mail: yousuke@m.sc.niigata-u.ac.jp
†E-mail: tamaki@math.sc.niigata-u.ac.jp

2 Ekelandの変分原理とCaristiの不動点定理

1972年にEkelandは，最適化の分野で重要とされ，他の分野にも広く応用されている次の定理を発表した。

定理 2.1 (Ekeland [3]). (X,d) を完備距離空間とし，$f : X \to [0,\infty]$ を実行定義域が空とならない $(\mathrm{dom}f := \{x \in X | f(x) < \infty\} \neq \emptyset)$，下半連続な (拡張実数値) 関数とする。この時，任意の $x_0 \in \mathrm{dom}f$ と $\varepsilon > 0$ に対して，次の 2 つの条件を同時に満たすような $\bar{x} \in X$ が存在する。

$$f(\bar{x}) \le f(x_0) - \varepsilon d(x_0, \bar{x}) \tag{1}$$

$$f(x) > f(\bar{x}) - \varepsilon d(x, \bar{x}) \quad \forall x \in X, x \neq \bar{x}. \tag{2}$$

また，その後，Caristiにより応用上重要な次の不動点定理が発表された。

定理 2.2 (Caristi [1], Caristi &Kirk [2]). X を完備距離空間とし，$f : X \to [0,\infty]$ を $\mathrm{dom}f \neq \emptyset$ で下半連続な関数とする。写像 $T : X \to X$ が任意の $x \in X$ で

$$d(x, Tx) \le f(x) - f(Tx)$$

を満たすものとする。この時，写像 T は不動点をもつ。

前の 2 つの定理は別々に発見されたものだが，実は同値であることが後の研究で分かっている。さらに，東京工業大学の高橋渉先生は次の定理を発表し，これらの 3 つの定理が同値となることを著書「凸解析と不動点定理」の中でまとめている。

定理 2.3 (高橋 [12]). X を完備距離空間とし，$f : X \to [0,\infty]$ を $\mathrm{dom}f \neq \phi$，下半連続な関数とする。さらに，$\inf_{x\in X} f(x) < f(u)$ が成り立つ $u \in X$ に対して，$v \neq u$ となる $v \in X$ で $f(v) + d(u,v) \le f(u)$ が成立するとする。この時，$f(x_0) = \inf_{x\in X} f(x)$ となるような $x_0 \in X$ が存在する。

以上の結果が実数値関数の場合に知られているものであるが，本報告では，それらの拡張として，ベクトル値関数に対するEkeland型の変分原理とCaristi型の不動点定理について考察していくことにする。

3 ベクトル最適化からの準備

まず最初に，本報告で使ういくつかの記号を導入する。X を完備距離空間，Y を分離的な（実）局所凸空間，Y^* をその位相的共役空間，$K \subset Y$ を凸錐とする。また，$K^+ = \{y^* \in Y^* | y^*(y) \ge 0 \quad \forall y \in K\}$，$K^\# = \{y^* \in Y^* | y^*(y) > 0 \quad \forall y \in K \setminus \{0\}\}$ とする。なお，錐 K がpointedとは

$$K \cap (-K) = \{0\}$$

を満たすことである。さらに，K によって以下のようなベクトル順序 $\leq_K$ が導入され，空間 $(Y, \leq_K)$ は半順序ベクトル空間となる。

$$\forall y_1, y_2 \in Y, \qquad y_1 \leq_K y_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} y_2 - y_1 \in K.$$

もし，K が pointed ならベクトル順序 $\leq_K$ は反対称的となる。逆に，一般の（実）半順序ベクトル空間に対して，その順序と一意に対応する凸錐を構成することができ，その凸錐から生成される半順序が元のベクトル順序と一致することが確かめられる。よって，本報告では，Y を $\mathrm{int}K \neq \emptyset$ を満たす pointed な凸錐 K をもつ実ベクトル空間と考える (よって $Y = K - K$ も満たされている)。

4 ベクトル値関数の Caristi の不動点定理 I

Tammer は，凸錐 K のベクトル $k^0 \in \mathrm{int}K$ を使って，$X \times Y$ 上に次のような半順序 $\preceq_{k^0}$ を導入した ([7])。

$$(x_1, y_1) \preceq_{k^0} (x_2, y_2) \overset{def}{\Longleftrightarrow} y_1 + d(x_1, x_2)k^0 \leq_K y_2.$$

もし K が pointed なら，半順序 $\preceq_{k^0}$ は反対称的となることが確かめられ，これによって空間 $(X \times Y, \preceq_{k^0})$ は反対称的な半順序空間となる。次に，$A \subset X \times Y$ と $(x, y) \in A$ に対し A の $\preceq_{k^0}$ に関する lower section $L_A(x, y)$ を次のように定義する。

$$L_A(x, y) := \{(x', y') \in A \mid (x', y') \preceq_{k^0} (x, y)\}.$$

次に，P_X と P_Y をそれぞれ，$X \times Y$ の X と Y への射影とする。つまり，

$$P_X(x, y) = x \quad \text{for every } (x, y) \in X \times Y$$

$$P_Y(x, y) = y \quad \text{for every } (x, y) \in X \times Y$$

である。Isac は，[8] の中で集合 A に対して次のような条件を与えて，半順序空間の与えられた集合での極小ベクトルについて考察した。

(H1) $\preceq_{k^0}$ の順序に関して減少する列 $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ が $x_n \to x \in X$ のとき，それぞれの $n \in N$ に対し $(x, y) \in L_A(x_n, y_n)$ を満たすような $y \in Y$ が存在する。

(H2) 列 $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ が $x_n \to x \in X$ で $\{y_n\}$ が $\leq_K$ の順序で減少しているとき，それぞれの $n \in N$ に対し $(x, y) \in A$ と $y \leq_K y_n$ を満たす $y \in Y$ が存在する。

もし，集合 A が条件 (H2) を満たし，同時に凸錐 K について，各 $y \in K$ で $K \cap (y - R_+ k^0)$ が閉集合となる場合には，条件 (H1) も成立することが分かる。これらの性質を利用して，Tammer は次のような極小値定理を導いた。

定理 4.1 ([7]). 集合 $A \subset X \times Y$ が条件 (H1) を満たし，また，条件 $P_Y(A) \subset \tilde{y} + K$ を満たすような $\tilde{y} \in Y$ が存在すると仮定する。この時，任意の $(x_0, y_0) \in A$ に対して，次の 2 つの条件を同時に満たすような $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ が存在する。

(1) $(\bar{x}, \bar{y}) \preceq_{k^0} (x_0, y_0)$

(2) もし，$(x', y') \in A$ が $(x', y') \preceq_{k^0} (\bar{x}, \bar{y})$ を満たすなら，$x' = x$

次に，f を X から Y への関数とする。$X \times Y$ の部分集合である f のエピグラフと f のハイポグラフをそれぞれ以下のように定義する。

$$\mathrm{epi} f := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) \leq_K y\}$$

$$\mathrm{hyp} f := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) \geq_K y\}$$

また，f のグラフを以下のように定義する。

$$\mathrm{gr} f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

上の定理 4.1 で $f : X \to Y$ に対して $A := \mathrm{epi} f$ と考えると，次のようなベクトル値関数に対する Ekeland の変分原理を得ることができる。

系 4.2 ([7]). ベクトル値関数 $f : X \to Y$ について，任意の $x \in X$ に対して，$\tilde{y} \leq_K f(x)$ を満たすような $\tilde{y} \in Y$ が存在し，さらに

(H3) 集合 $\{x' \in X \mid f(x') + d(x', x)k^0 \leq_K f(x)\}$ が任意の $x \in X$ で閉集合である

とする。この時，任意の初期ベクトル $x_0 \in X$ に対して，次の 2 つの条件を同時に満たすような $\bar{x} \in X$ が存在する。

(1) $f(\bar{x}) + d(\bar{x}, x_0)k^0 \leq_K f(x_0)$,

(2) $x \in X$ で $f(x) + d(x, \bar{x})k^0 \leq_K f(\bar{x})$ ならば $x = \bar{x}$ となる。

この結果を利用して，私たちはベクトル値関数に対する次のような Caristi 型の不動点定理を得る。

定理 4.3. $x_0 \in X$ とする。ベクトル値関数 $f : X \to Y$ について，任意の $x \in X$ に対して，$\tilde{y} \leq_K f(x)$ を満たすような $\tilde{y} \in Y$ が存在し，条件 (H3) が成立するものとする。さらに，写像 $T : X \to X$ があって，以下の式を満たすものとする。

$$f(Tx) + d(Tx, x)k^0 \leq_K f(x) \qquad \forall x \in X$$

この時，写像 T は不動点をもつ。

Proof. 定理の仮定より，前の系の結果から次のことが成立する。

$$\forall x \in X, \quad f(x) + d(x, \bar{x})k^0 \leq_K f(\bar{x}) \Rightarrow x = \bar{x}. \tag{3}$$

定理の最後の仮定より次が言える。

$$f(Tx) + d(Tx, x)k^0 \leq_K f(x) \qquad \forall x \in X. \tag{4}$$

もし，ここで $T\bar{x} \neq \bar{x}$ とすると，(3) の対偶をとり

$$f(T\bar{x}) + d(T\bar{x}, \bar{x})k^0 \not\leq_K f(\bar{x})$$

$$f(\bar{x}) - f(T\bar{x}) - d(T\bar{x}, \bar{x})k^0 \notin K$$

が導きだせるが，それは (4) に反する。 □

5 ベクトル値関数のCaristiの不動点定理 II

Tammer はスカラー化関数の導入によりベクトル値関数に対する新たな変分原理を得た ([7] の第 3 章を参照せよ)。なお，この章では K は閉凸錐で $k^0 \in K \setminus (-K)$ とする。実際には，この論文の中では凸錐 K を pointed としているので，この条件は $0 \neq k^0 \in K$ に等しい。

補題 5.1 ([7]). 写像 $\varphi : Y \to [-\infty, \infty]$ を次で定義する。

$$\varphi(y) = \inf\{t \in R \,|\, y \in tk^0 - K\}$$

この時，関数 φ は次の 6 つの性質をもつ。

(1) 任意の $y \in Y$ に対して，$\varphi(y) > -\infty$ であると同時に，φ は proper ($\mathrm{dom}\varphi \neq \emptyset$)

(2) φ は連続

(3) φ は劣加法的

(4) φ は $\leq_K$ の順序で非増加（広義の減少）(つまり $y_1 \leq_K y_2$ なら $\varphi(y_1) \leq \varphi(y_2)$)

(5) $\{y \in Y | \varphi(y) \leq t\} = tk^0 - K$

(6) $\varphi(y + \lambda k^0) = \varphi(y) + \lambda \qquad \forall y \in Y, \lambda \in R$

関数 φ は線形ではないが線形に近い性質を持っていることがわかる。この関数を使ってベクトル値関数をスカラー化し，Ekeland の変分原理を適用するという手法で得られたのが次である。

定理 5.2 ([7]). $(x_0, y_0) \in A$ を固定する。次の3つの条件を仮定する。

(a) $P_Y(A) \cap (y_0 - \tilde{t}k^0 - K) = \emptyset$ を満たすような $\tilde{t} \in R$ が存在する。

(b) 各 $r \in R$ について，$A^r := \{x \in X |\ y \leq_K y_0 + rk^0 \text{ for some } (x, y) \in A\}$ は閉集合。

(c) K によって定まる半順序の意味で単調非増加で，proper な，下半連続，劣加法的な任意の関数 $\Phi : Y \to R$ は $A_x - y_0$ で下限の値をとる。

この時，$(x_0, y_0) \in A$ に対して，次の2つの条件を同時に満たす $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ が存在する。

(1) $\bar{y} + d(\bar{x}, x_0)k^0 \leq_K y_0$

(2) もし，$(x', y') \in A$ が $y' + d(\bar{x}, x')k^0 \leq_K \bar{y}$ を満たすなら $x' = x$

さらに，次が成立する。

$$y' \in (\bar{y} - K) \setminus (\bar{y} - (0, \infty)k^0 - K)。$$

系 5.3 ([7]). $f : X \to Y$，$x_0 \in X$ とする。任意の $r \in R$ に対し，集合 $\{x \in X | f(x) \leq_K f(x_0) + rk^0\}$ は閉集合とする。さらに，$\varepsilon > 0$ に対し $f(X) \cap (f(x_0) - \varepsilon k^0 - K \setminus \{0\}) = \emptyset$ とする。この時，次の2つの条件を同時に満たすような $\bar{x} \in X$ が存在する。

(1) $f(\bar{x}) + \sqrt{\varepsilon} d(\bar{x}, x_0)k^0 \leq_K f(x_0), \qquad d(\bar{x}, x_0) \leq \sqrt{\varepsilon}$

(2) $f(x) + \sqrt{\varepsilon} d(\bar{x}, x)k^0 \leq_K f(\bar{x}) \Rightarrow x = \bar{x}$

この結果を利用して，私たちはもうひとつのベクトル値関数に対する Caristi 型の不動点定理を得た。

定理 5.4. $f : X \to Y$，$x_0 \in X$ とする。任意の $r \in R$ に対し，集合 $\{x \in X | f(x) \leq_K f(x_0) + rk^0\}$ は閉集合とする。さらに，$\varepsilon > 0$ に対し $f(X) \cap (f(x_0) - \varepsilon k^0 - K \setminus \{0\}) = \emptyset$ とする。写像 $T : X \to X$ が次の不等式を満たすとする。

$$f(Tx) + \sqrt{\varepsilon} d(Tx, x)k^0 \leq_K f(x), \qquad \forall x \in X$$

この時，T は不動点を持つ。

Proof. 前の系 5.3 の結果を使い，定理 4.3 と同じ方法で得られる。 □

6 ベクトル値関数のCaristiの不動点定理 III

Tammerは[6]で，集合AのYへの射影$P_Y A$の有界性の条件を，より弱い条件に取り替えることを試みている。そして，有界性の条件に関してIのタイプより弱い形で極小値定理を得ている。

定理 6.1 ([6]). $K \setminus \{0\} \subset \mathrm{int}B$を満たすような凸錐$B \subset Y$が存在するとする。さらに，集合$A \subset X \times Y$が条件(H1)を満たし，$P_Y A \cap (\tilde{y} - \mathrm{int}B) = \emptyset$となるベクトル$\tilde{y} \in Y$が存在すると仮定する。この時，初期ベクトル$(x_0, y_0) \in A$に対して，次の2つの条件を同時に満たすような$(\bar{x}, \bar{y}) \in A$が存在する。

(1) $(\bar{x}, \bar{y}) \preceq_{k^0} (x_0, y_0)$

(2) $(x', y') \in A$で$(x', y') \preceq_{k^0} (\bar{x}, \bar{y})$ならば，$x' = \bar{x}$

系 6.2 ([6]). $f : X \to Y$とし$K \setminus \{0\} \subset \mathrm{int}B$を満たすような凸錐$B \subset Y$が存在し，$f(X) \cap (\tilde{y} - \mathrm{int}B) = \emptyset$となる$\tilde{y} \in Y$が存在すると仮定する。さらに，条件(H3)が成立するものとする。この時，初期ベクトル$x_0 \in X$に対して，次の2つの条件を同時に満たすような$\bar{x} \in X$が存在する。

(1) $f(\bar{x}) + d(\bar{x}, x_0)k^0 \leq_K f(x_0)$

(2) $x \in X$で$f(x) + d(x, \bar{x})k^0 \leq_K f(\bar{x})$ならば，$x = \bar{x}$

この系6.2に対しても同様にして次のような不動点定理を得ることができる。

定理 6.3. $f : X \to Y$，$x_0 \in X$とし，凸錐$B \subset Y$が$K \setminus \{0\} \subset \mathrm{int}B$を満たし$f(X) \cap (\tilde{y} - \mathrm{int}B) = \emptyset$となる$\tilde{y} \in Y$が存在するとする。さらに，条件(H3)が成立するものとする。加えて，写像$T : X \to X$が

$$f(Tx) + d(Tx, x)k^0 \leq_K f(x), \qquad \forall x \in X$$

を満たすとする。この時，Tは不動点をもつ。

Proof. 系6.2を使い，前の不動点定理と同じ方法で導ける。 □

7 新たなる極小値定理とベクトル値関数のCaristiの不動点定理 IV

田中は従来とは異なる近似有効解の概念を導入した。

定義 7.1 (田中 [14]). AをYの空でない部分集合とし$\varepsilon > 0$とする。ベクトル$y \in Y$が凸錐Kに対するAの下方ε-近似有効点(lower ε-appproximately efficient point)であるとは$y \in A$で$(y - K) \cap (A \setminus B_\varepsilon(y)) = \emptyset$であるときを言う。ここで$B_\varepsilon(y) = \{\hat{y} \in Y \mid \|\hat{y} - y\| \leq \varepsilon\}$。

私たちはこの集合 A の Y への射影 $P_Y A$ の有界性の条件について上の概念を取り入れ，次のような極小値定理を得た。

定理 7.2. 集合 $A \subset X \times Y$ が条件 (H1) を満たし，$(P_Y(A) \setminus B_\varepsilon(\tilde{y})) \cap (\tilde{y} - \mathrm{cl}K) = \emptyset$ を満たすような $\tilde{y} \in Y$，$\varepsilon > 0$ が存在するとする。この時，初期ベクトル $(x_0, y_0) \in A$ に対して，次の 2 つの条件を同時に満たすような $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ が存在する。

(1) $(\bar{x}, \bar{y}) \preceq_{k^0} (x_0, y_0)$

(2) $(x', y') \in A$ で $(x', y') \preceq_{k^0} (\bar{x}, \bar{y})$ ならば，$x' = \bar{x}$

Proof. 関数 z を次のように定義する。

$$z : Y \to R \qquad z(y) := \inf\{t \in R | y \in tk^0 - \mathrm{cl}K\}$$

補題 5.1 より z は proper，下半連続，劣線形，$\leq_K$ の順序の意味で単調非増加となり，

$$\{y \in Y | z(y) \leq t\} = tk^0 - \mathrm{cl}K$$

$$z(y + \lambda k^0) = z(y) + \lambda \qquad \forall y \in Y, \lambda \in R$$

という性質をもつ。

また，z は $P_Y A$ 上で下に有界であることも次のようにして分かる。各 $y \in P_Y A$ について，$z(y - \tilde{y}) \geq 0$ の場合は，$0 \leq z(y - \tilde{y}) \leq z(y) + z(-\tilde{y})$ なので，$z(y) \geq -z(-\tilde{y})$ となり，$z(y - \tilde{y}) < 0$ の場合は，z の定義より $y - \tilde{y} \in -\lambda k^0 - \mathrm{cl}K$ となる $\lambda > 0$ が存在し，

$$y \in \tilde{y} - (\lambda k^0 + \mathrm{cl}K) \subset \tilde{y} - (K + \mathrm{cl}K) \subset \tilde{y} - \mathrm{cl}K$$

となる。ここで $y \in P_Y(A)$ かつ $(P_Y(A) \setminus B_\varepsilon(\tilde{y})) \cap (\tilde{y} - \mathrm{cl}K) = \emptyset$ なので $y \in B_\varepsilon(\tilde{y})$ でなければならない。この場合は，z の下半連続性より，$z(y) \geq \inf_{w \in B_\varepsilon(\tilde{y})} z(w) > -\infty$ となる。よって，

$$z(y) \geq \min\left\{\inf_{w \in B_\varepsilon(\tilde{y})} z(w),\ -z(-\tilde{y})\right\} > -\infty$$

となり，z は $P_Y A$ 上で下に有界である。

次に，列 $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq 0} \subset A$ を次のように構成する。各 $(x_n, y_n) \in A$ について $(x_{n+1}, y_{n+1}) \in A$ が次の 2 つの条件を同時に満たすように選ぶ。

(1) $(x_{n+1}, y_{n+1}) \preceq_{k^0} (x_n, y_n)$

(2) $z(y_{n+1}) \leq \inf\{z(y) | (x, y) \in A, (x, y) \preceq_{k^0} (x_n, y_n)\} + \frac{1}{n+1}$

この時，z の $P_Y A$ 上での下への有界性と条件 (H1) より上記の条件 (1)，(2) を満たす列がとれることが保障される。もちろん，$\{(x_n, y_n)\}$ は $\preceq_{k^0}$-decreasing である。したがって，

$$y_{n+p} + d(x_{n+p}, x_n)k^0 \leq_K y_n \qquad \forall n, p \in N,$$

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq z(y_n) - z(y_{n+p}) \leq \frac{1}{n} \qquad \forall n, p \in N$$

となる。よって，$\{x_n\}$ は完備距離空間 (X, d) の中の Cauchy 列なので x_n はある点 $\bar{x} \in X$ に収束する。(H1) よりそれぞれの $n \in N$ に対し，$(\bar{x}, \bar{y}) \in A$，$(\bar{x}, \bar{y}) \preceq_{k^0} (x_n, y_n)$ を満たすような $\bar{y} \in Y$ が存在する。$(\bar{x}, \bar{y})$ が求める点である。実際 $(x', y') \in A$ が $(x', y') \preceq_{k^0} (\bar{x}, \bar{y})(\preceq_{k^0} (x_n, y_n)$ for every $n \in N)$ とすると $z(y') + d(x', \bar{x}) \leq z(\bar{y})$

$$d(x', \bar{x}) \leq z(\bar{y}) - z(y') \leq z(y_n) - z(y') \leq \frac{1}{n+1} \qquad \forall n \geq 1$$

したがって $d(x', \bar{x}) = z(\bar{y}) - z(y') = 0$，$x' = \bar{x}$ となる。$y' \leq_K \bar{y}$ なので $y' \neq \bar{y}$ とすると $\bar{y} - y' \in K \setminus \{0\}$ となり $z(y') < z(\bar{y})$ が導かれ矛盾する。 □

この極小値定理から前と同じようにして４つめの，ベクトル値関数に対する Ekeland 型の変分原理と Caristi 型の不動点定理を得ることができる。

系 7.3. $f : X \to Y$ とし，$(f(X) \setminus B_\varepsilon(\tilde{y})) \cap (\tilde{y} - \mathrm{cl}K) = \emptyset$ を満たすような $\tilde{y} \in Y$，$\varepsilon > 0$ が存在するとする。さらに，

$$\{x' \in X \mid f(x') + d(x', x)k^0 \leq_K f(x)\}$$

がそれぞれの $x \in X$ で閉集合であるとする。この時，初期ベクトル $x_0 \in X$ に対して，次の２つの条件を同時に満たすような $\bar{x} \in X$ が存在する。

(1) $f(\bar{x}) + d(\bar{x}, x_0)k^0 \leq_K f(x_0)$

(2) $x \in X$ で $f(x) + d(x, \bar{x})k^0 \leq_K f(\bar{x})$ ならば，$x = \bar{x}$

定理 7.4. $f : X \to Y$，$x_0 \in X$ とし，$(f(X) \setminus B_\varepsilon(\tilde{y})) \cap (\tilde{y} - \mathrm{cl}K) = \emptyset$ を満たすような $\tilde{y} \in Y$ と $\varepsilon > 0$ が存在するとする。さらに，

$$\{x' \in X \mid f(x') + d(x', x)k^0 \leq_K f(x)\}$$

がそれぞれの $x \in X$ で閉集合であるとする。加えて，写像 $T : X \to X$ が次の不等式を満たすとする。

$$f(Tx) + d(Tx, x)k^0 \leq_K f(x) \qquad \forall x \in X$$

この時，写像 T は不動点をもつ。

参考文献

[1] J. Caristi, *Fixed point theorems for mapping satisfying inwardness conditions*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol.215, pp.241–251, 1976.

[2] J. Caristi and W. A. Kirk, *Geometric fixed point theory and inwardness conditions*, Lecture Note in Math., Vol.490, pp.74–83, Springer, Berlin, 1975.

[3] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl., Vol.47, pp.324–354, 1974.

[4] I. Ekeland, *Nonconvex minimization problems*, Bull. Amer. Math. Soc., Vol.1, pp.443–474, 1979.

[5] C. Gerth and P. Weidner, *Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization* J. Optim. Theory Appl., Vol.67, No.2, pp.297–320, 1990.

[6] A. Gopfert, Chr. Tammer, and C. Zalinescu, *A new minimal point theorem in product space*, Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen (Journal for Analysis and its Applications), Vol.18, No.3, pp.767–770, 1999.

[7] A. Gopfert, Chr. Tammer, and C. Zalinescu, *On the vectorial Ekeland's variational principle and minimal points in product spaces*, Nonlinear Analysis: Theory, methods and Applications, Vol.39, pp.909–922, 2000.

[8] G. Isac, *The Ekeland's principle and the Pareto ε-Effeciency*, Multi-objective programming and goal programing: theories and applications, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol.432, pp.148–163, Springer Berlin, 1996.

[9] D. T. Luc, *Theory of Vector Optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[10] R. R. Phelps, *Convex function, monotone operators and differentiability*, Lecture Notes in Mathmatics, Vol.1364, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[11] R. T. Rockafellar and R.J-B. Wets, *Variational Analysis*, Springer, Berlin, 1998.

[12] W. Takahashi, *Convex Analysis and Fixed point Approximation (in Japanese)*, Yokohama publishers, Yokohama, 2000.

[13] Chr. Tammer, *A generalization of Ekeland's principle*, Optimization, Vol.25, pp.129–141, 1992.

[14] T. Tanaka, *Approximately efficient solutions in vector optimization*, J. Multi-Criteria Decision Analysis, Vol.5, pp.271-278, 1996.